Feuille Uniformisation

Exercice [Espace de Bergman]

Si U est un ouvert de $\mathbf{C}$ on note $\mathcal{B}(U) := \mathscr{O}(U) \cap \mathcal{L}^2(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes qui sont également de carré intégrable (pour la mesure de Lebesgue) sur U (espace de Bergman).

1. Montrer que pour $\overline{D}(z_0, r) \subset U$
$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r} ||f||_2$$
2. En déduire que si $K \subset U$ est un compact de U, il existe une constante C_K ne dépendant que de K telle que :
$$\forall\, f \in \mathcal{B}(U),\ ||f||_K \leq C_K ||f||_2.$$
Puis que $\mathcal{B}(U)$ muni de la norme L^2 est un espace de Hilbert.
3. À quoi se réduit l'espace $\mathcal{B}(\mathbf{C})$?
4. Montrer qu'il existe une fonction $k_z \in \mathcal{B}(U)$ telle que $f(z) = \langle f, k_z \rangle$ (produit scalaire dans $\mathcal{B}(U)$).
5. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une base orthonormée de $\mathcal{B}(U)$. Montrer que pour tout $z \in U$ la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)\overline{f_n(z)}$ converge.
6. Montrer que
$$k(x, z) := k_z(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)\overline{f_n(z)}$$
pour toute base orthonormée $(f_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{B}(U)$. La fonction k est appelée le noyau reproduisant (ou noyau de Bergman).
7. Montrez que $f \mapsto \langle f, k_z \rangle$ est la projection orthogonal de L^2 sur $\mathcal{B}$.
8. Calculer le noyau de Bergman de $\mathbb{D}$ et en déduire que
$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(x)}{\pi(1 - \bar{x}z)^2} d\lambda(x)$$
pour toute fonction $f \in B(\mathbb{D})$.
9. Soit $\varphi : U \to V$ un biholomorphisme. On notera k et $\tilde{k}$ les noyaux de Bergman de U et V respectivement. Montrez que $k(x, z) = \tilde{k}(\varphi(x), \varphi(z))\varphi'(x)\overline{\varphi'(z)}$. (indication : si $f \in \mathcal{B}(V)$ alors $f \circ \varphi\varphi' \in \mathcal{B}(U)$)
10. En déduire que si $\varphi : U \to \mathbb{D}$ est une représentation conforme s'annullant en z_0 et ayant une dérivée strictement positive en z_0 alors
$$\varphi'(z) = \sqrt{\frac{\pi}{k(z_0, z_0)}} k(z, z_0)$$